Examen parcial de Análisis de Variable Compleja.
Cuarto curso de Matemáticas (Metodología).
8 de Junio de 1996.

1. Integrando la función $f(z) = \dfrac{\log(i+z)}{1+z^2}$ a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0;\varepsilon,\mathrm{R})$, $0<\varepsilon<1<\mathrm{R}$, probar que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\,dx = \pi \log 2.$$

2. Determinar el número de ceros del polinomio
$$P(z) = 2z^5 + 4z - 1$$
a) en el anillo $A(0;1,2)$;
b) en el semiplano de la derecha.

3. Construir un isomorfismo conforme del dominio
$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1,\ |z-i| < 1\}$$
sobre el disco unidad.

4. Enunciar y demostrar los Teoremas de Hurwitz y de Montel.

5. Describir los isomorfismos conformes de $\mathbb{C}$.

6. Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{C}$ y f una función no constante holomorfa en Ω y continua en $\overline{\Omega}$ tal que $|f(z)| = 1$ para todo $z \in \overline{\Omega}$. Pruébese que $f(\Omega) = D(0,1)$.